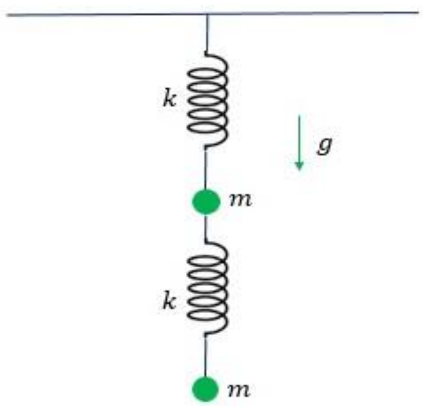
Capítulo 6. Mecánica Teórica

Prof. Javier García.

Javier Antonio Almonte Espinal.

Ejercicio Propuesto:



Dado el sistema de la Figura:

a) Calcular el Lagrangiano.

b) Encontrar el cambio de coordenadas que diagonalice el Lagrangiano.

c) Resolver el sistema de ecuaciones.

Solución:

a) Calcular el Lagrangiano:

Energía Cinética: $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \right)$

Energía Potencial: $V = \frac{k}{2} \left[\left(x_1 - a \right)^2 + \left(x_2 - x_1 - a \right)^2 \right] - mg \left(x_1 + x_2 \right)$

El lagrangiano nos que así: $L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \right) - \frac{k}{2} \left[\left(x_1 - a \right)^2 + \left(x_2 - x_1 - a \right)^2 \right] + mg \left(x_1 + x_2 \right)$

Realizamos un cambio de variable:

$$\begin{cases} x_1 = a + y_1 \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{y}_1 \\ x_2 = y_2 + 2a = \dot{x}_2 = \dot{y}_2 \end{cases}$$

Entonces: $V = \frac{k}{2} \left[\left(y_1 \right)^2 + \left(y_2 - y_1 \right)^2 \right] - mg \left(y_1 + y_2 + 3a \right)$

Finalmente el lagrangiano es: $L = \frac{1}{2} m \left[\dot{y}_1 + \dot{y}_2 \right] - \frac{k}{2} \left[\left(y_1 \right)^2 + \left(y_2 - y_1 \right)^2 \right] + mg \left[y_1 + y_2 + 3a \right]$

b) Encontrar el cambio de coordenadas que diagonalice el Lagrangiano.

Desarrollando la parte interna del potencial y tenemos lo siguiente:

$$y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2 = 2y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}(A)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2$$

Para determinar la matriz A plantearemos lo siguiente: sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 & + & a_{22}y_2 \end{pmatrix} = 2y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2$$

$$a_{11}y_1^2 + a_{12}y_1y_2 + a_{21}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 = 2y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2$$

$a_{11}y_1^2 + \left(a_{12} + a_{21}\right)y_1y_2 + a_{22}y_2^2 = 2y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2$ igualamos los coeficiente.

$$a_{11} = 2$$
$$a_{12} + a_{21} = -2 \rightarrow a_{12} = -1 \,; a_{21} = -1$$
$$a_{22} = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizar: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$$
$$A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & - & y \\ -x & + & y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (2-\lambda)x & - & y \\ -x & + & (1-\lambda)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x - y = 0 \\ -x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Calcular el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & -1 \\ -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

Mediante la formula general podemos determinar los valores de λ:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Para $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x - y = 0$$

$$-x + \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)y = 0$$

$x = 1$ y $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x - y = 0$$

$$-x + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)y = 0$$

$x = 1$ y $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Llamamos M a la matriz que tiene los vectores propios como columna:

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} & \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \\ -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} & \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \end{pmatrix}$$

Para la matriz A diagonalizable: $D = M^T AM$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Cambio de Variable:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} & \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \\ -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} & \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\, z_1 + \sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{10}}\, z_2$$
$$y_2 = -\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{10}}\, z_1 + \sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\, z_2$$

$$2y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} z_1^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} z_2^2$$

El Lagrangiano queda:

$$L = \frac{1}{2} m\left[\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2\right] - \frac{k}{2}\left[\tfrac{3+\sqrt{5}}{2} z_1^2 + \tfrac{3-\sqrt{5}}{2} z_2^2\right] + mg\left[\left(\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}} - \sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) z_1 + \left(\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\right) z_2 + 3a\right]$$

Aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para: z_1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial z_1}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1}=m\dot{z}_1 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{z}_1\right)=m\ddot{z}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_1}=k\,\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\,z_1+mg\left(\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}}-\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)$$

$$m\ddot{z}_1-k\,\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\,z_1-mg\left(\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}}-\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)=0 \rightarrow \ddot{z}_1-\frac{k}{m}\,\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\,z_1-g\left(\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}}-\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)=0$$

También para z_2

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial z_2}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2}=m\dot{z}_2 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{z}_2\right)=m\ddot{z}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_2}=k\,\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\,z_2+mg\left(\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{10}}+\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\right)$$

$$m\ddot{z}_2-k\,\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\,z_2-mg\left(\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{10}}+\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\right)=0 \rightarrow \ddot{z}_2-\frac{k}{m}\,\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\,z_2-g\left(\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{10}}+\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\right)=0$$

c) Resolver el sistema de ecuaciones.

Para resolver estas dos ecuaciones diferenciales:

$$(1)\quad \ddot{z}_1 - \frac{k}{m}\frac{3+\sqrt{5}}{2}z_1 = g\left(\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}} - \sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)$$

$$(2)\quad \ddot{z}_2 - \frac{k}{m}\frac{3-\sqrt{5}}{2}z_2 = g\left(\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\right)$$

Si notamos las dos ecuaciones son de la forma: $ay'' + cy = f(t)$, la cual podemos resolver por el método de coeficiente indeterminado.

Respuesta:

$$z_1(t) = C_1 sen\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}}t\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}}t\right) - \frac{mg\left(\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)}{k\,\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

$$z_2(t) = C_1 sen\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}}t\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}}t\right) - \frac{mg\left(\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)}{k\,\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$$